LUYỆN THI VÀ GIA SƯ CHẤT LƯỢNG CAO MÔN TOÁN
SĐT: 01234332133. ĐC: Phòng 5, dãy 22 Tập thể xã tắc.TP HUẾ
Biên soạn: Ths. Trần Đình Cư



Bài giảng Giải tích11
Chương IV

TÀI LIỆU THÂN TẶNG CÁC EM HỌC SINH LỚP TOÁN 11-THẦY CƯ

HUẾ, NGÀY 4/1/2017

MỤC LỤC

CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa dãy số có giới hạn 0

Dãy (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần đến dương vô cực, nếu mỗi số dương bé tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ số hạng nào đó trở đi, $|u_n|$ đều có thể nhỏ hơn một số dương đó.

Kí hiệu: $\lim(u_n)=0$ hay $\lim u_n=0$ hoặc $u_n\to 0$

$$\boxed{\lim u_n=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n>n_0\Rightarrow |u_n|<\varepsilon}$$

(Kí hiệu "$\lim u_n=0$" còn được viết "$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$", đọc dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần đến dương vô cực)

Nhận xét: Từ định nghĩa ta suy ra rằng

a) Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi và chỉ khi dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn 0

b) Dãy số không đổi (u_n), với $u_n=0$ có giới hạn 0.

2. Các định lí

*** Định lí 1:** Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Nếu $|u_n|\le v_n$ với mọi n và $\lim v_n=0$ thì $\lim u_n=0$

*** Định lí 2:** Nếu $|q|<1$ thì $\lim q^n=0$

3. Định nghĩa dãy có giới hạn hữu hạn

*** Định nghĩa 1:** Ta nói dãy (v_n) có giới hạn là số L (hay v_n dần tới L) nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-L)=0$.

Kí hiệu: $\lim v_n=L$ hay $v_n\to L$

Ngoài ra ta cũng có thêm định nghĩa như sau (Ngôn ngữ ε):

$$\boxed{\lim v_n=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n>n_0\Rightarrow |v_n-L|<\varepsilon}$$

4. Một số định lí

*** Định lí 1:** Giả sử $\lim u_n=L$. Khi đó

- $\lim|u_n|=|L|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n}=\sqrt[3]{L}$
- Nếu $u_n\ge 0$ với mọi n thì $L\ge 0$ và $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{L}$

*** Định lí 2:** Giả sử $\lim u_n=L$ và $\lim v_n=M\ne 0$, c là một hằng số. Ta có:

$\lim(u_n\pm v_n)=a\pm b$; $\lim(cu_n)=cL$; $\lim u_n.v_n=\lim u_n.\lim v_n$; $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\lim u_n}{\lim v_n}=\dfrac{a}{b}$;

5. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

- Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội q thoã mãn $|q|<1$
- Công thức tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn: $S=u_1+u_2+....+u_n+...=\dfrac{u_1}{1-q}$

6. Dãy có giới hạn $+\infty$

Định nghĩa: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$, nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$

$$\boxed{\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \Rightarrow u_n > M}$$

7. Dãy có giới hạn $-\infty$

Định nghĩa: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$, nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số dương đó.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$

$$\boxed{\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \Rightarrow u_n < -M}$$

Chú ý: Các dãy số có giới hạn $+\infty$ và $-\infty$ được gọi chung là dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực

8. Một vài quy tắc tính giới hạn vô cực

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$

Tương tự ta lập luận các trường hợp còn lại

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$

Tương tự ta lập luận các trường hợp còn lại

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Sử dụng định nghĩa tìm giới hạn 0 của dãy số

Phương pháp: $\lim u_n = 0$ khi và chỉ khi $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Ví dụ 1. Biết dãy số (u_n) thoã mãn $|u_n| \le \dfrac{n+1}{n^2}$ với mọi n. Chứng minh rằng $\lim u_n = 0$

Giải

Đặt $v_n = \dfrac{n+1}{n^2}$.

Ta có $\lim v_n = \lim \dfrac{n+1}{n^2} = 0$. Do đó, $|v_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi (1)

Mặt khác, theo giả thiết ta có $|u_n| \le v_n \le |v_n|$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $\lim u_n = 0$

Ví dụ 2. Biết rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0. Giải thích vì sao dãy số (v_n) với $v_n = |u_n|$ cũng có giới hạn là 0. Chiều ngược lại có đúng không?

Hướng dẫn

Vì (u_n) có giới hạn là 0 nên $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Mặt khác, $|v_n| = ||u_n|| = |u_n|$. Do đó, $|v_n|$ cũng có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Vậy (u_n) có thể nhoe hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Vậy (v_n) cũng có giới hạn là 0.

(Chứng minh tương tự, ta có chiều ngược lại cũng đúng).

Ví dụ 3. Vì sao dãy (u_n) với $u_n = (-1)^n$ không thể có giới hạn là 0 khi $n \to +\infty$?

Ví dụ 4. Sử dụng đỉnh nghĩa chứng minh rằng $\lim\frac{\sin n}{n}=0$

Hướng dẫn

Ta có

$\left|u_n-0\right|=\left|\frac{\sin n}{n}\right|\le\frac{1}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon},n_0\in\mathbb{N}.$ Khi đó:
$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n>n_0\Rightarrow\left|u_n-0\right|<\varepsilon.$ Vậy : $\lim u_n=0$

Dạng 2. Sử dụng định lí để tìm giới hạn 0 của dãy số

Phương pháp: Ta dụng định lí 1 và 2 và một số giới hạn thường gặp

$$\oplus\lim\frac{1}{n}=0\left(\text{hay}\lim\frac{A}{n}=0\right)$$
$$\oplus\lim\frac{1}{\sqrt{n}}=0\ ;\ \lim\frac{1}{n^k}=0\ \text{ với k nguyên dương}$$
$$\oplus\lim q^n=0\quad\text{ nếu } |q|<1$$

Ví dụ 1.

a) Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Chứng minh rằng nếu $\lim v_n=0$ và $|u_n|\le v_n$ với mọi n thì $\lim u_n=0$

b) Áp dụng kết quả câu a) để tính giới hạn của các dãy số có số hạng tổng quát như sau:

a) $u_n=\frac{1}{n!}$ b) $u_n=\frac{(-1)}{2n-1}$ c) $u_n=\frac{2-n(-1)^n}{1+2n^2}$
d) $u_n=(0{,}99)^n\cos n$ e) $u_n=5^n-\cos\sqrt{n}\pi$

Ví dụ 2. Tình giới hạn sau:

a) $\lim\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}$; b) $\lim\frac{5^n+1}{5^n-1}$; c) $\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$; d) $\lim\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

Hướng dẫn và đáp số: Sử dụng công thức $\lim q^n=0,|q|<1$

a) 3 b) 1 c) 7 d) $\frac{1}{3}$

Dạng 3. Sử dụng định nghĩa tìm giới hạn hữu hạn

Phương pháp: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-a)=0$

Ví dụ 1. Sử dụng định nghĩa chứng minh $\lim\frac{3n+2}{n+1}=3$

Hướng dẫn

$|u_n-3|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$; chọn $n_0>\frac{1}{\varepsilon},n_0\in\mathbb{N}.$ Khi đó:
$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n>n_0\Rightarrow|u_n-3|<\varepsilon.$ Vậy : $\lim u_n=3$

Ví dụ 2. Sử dụng định nghĩa chứng minh $\lim\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$

Ví dụ 3. Cho dãy số (uₙ) xác định bởi: $u_n=\frac{3n+2}{n+1}$

a) Tìm số n sao cho $|u_n-3|<\frac{1}{1000}$

b) Chứng minh rằng với mọi n > 999 thì các số hạng của dãy (u_n) đều nằm trong khoảng (2,999;3,001).

Hướng dẫn

a) $\left|u_n-3\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{1000}\Leftrightarrow n>999$

b) Khi $n>999\Leftrightarrow\left|u_n-3\right|<\frac{1}{1000}\Leftrightarrow 3-\frac{1}{1000}<u_n<3+\frac{1}{1000}\Leftrightarrow 2,999<u_n<3,001$

BTTT: Cho dãy (u_n) xác định bởi: $u_n=\frac{2n+1}{n+2}$

a) Tìm số n sao cho $\left|u_n-2\right|<\frac{1}{100}$

b) Chứng minh rằng với mọi n > 2007 thì các số hạng của dãy (u_n) đều nằm trong khoảng (1,998;2,001).

Dạng 4. Sử dụng các giới hạn đặc biệt và các định lý để giải các bài toán tìm giới hạn dãy.

Phương pháp

- Ta thường sử dụng: $\lim\frac{A}{v_n}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\infty$; $\lim\frac{A}{v_n}=\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$
- Nếu biểu thức có dạng phân thức tử số và mẫu số chứa luỹ thừa của n thì chia tử và mẫu cho n^k với k là mũ cao nhất bậc ở mẫu.
- Nếu biểu thức chứa căn thức cần nhân một lượng liên hiệp để đưa về dạng cơ bản.

$A-B$ lượng liên hiệp là: $A+B$
$\sqrt{A}-B$ lượng liên hiệp là: $\sqrt{A}+B$
$\sqrt{A}-\sqrt{B}$ lượng liên hiệp là: $\sqrt{A}+\sqrt{B}$
$\sqrt[3]{A}-B$ lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2}+B\sqrt[3]{A}+B^2\right)$
$\sqrt[3]{A}+B$ lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2}-B\sqrt[3]{A}+B^2\right)$

Ví dụ 1. Tính $\lim\frac{3n^3-5n^2+1}{2n^3+6n^2+4n+5}$.

Giải

$$\lim\frac{3n^3-5n^2+1}{2n^3+6n^2+4n+5}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n^3}}=\frac{3}{2}$$

Ví dụ 2. Tính $\lim\frac{\sqrt{2n^2+1}+5n}{1-3n^2}$.

Giải

$$\lim\frac{\sqrt{2n^2+1}+5n}{1-3n^2}=\lim\frac{\frac{1}{n}\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\frac{5}{n}}{\frac{1}{n^2}-3}=\frac{0}{-3}=0$$

Ví dụ 3. Tính $\lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)$

Giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)=\lim\frac{n^2+7-n^2-5}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}}=\lim\frac{2}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}}=0$$

Ví dụ 4. Tính $\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2}\right)$

Giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2}\right)=\lim\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2}}=\lim\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1}}=\frac{3}{2}$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

$a)\lim\frac{4n^2-n-1}{3+2n^2}$ $\quad b)\lim\frac{n^2-n-1}{2n^3+5}$ $\quad c)\lim\left(n^2-\frac{2}{n+1}\right)$

Tổng quát: Tính giới hạn: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+...+a_{m-1}n+a_m}{b_0n^p+b_1n^{p-1}+...+b_{p-1}n+b_p}$

Hướng Dẫn: $\left[\begin{array}{l}\text{Xét } p=m\\ \text{Xét } n>p\\ \text{Xét } n<p\end{array}\right.$. Chia cả tử và mẫu cho n^p, p là bậc cao nhất ở mẫu

Tính giới hạn sau:

$d)\ \lim\frac{2n^4-n^2+1}{(2n+1)(3-n)\left(n^2+2\right)}$ $\quad e)\ \lim\frac{(2-3n)^3(n+1)^2}{1-4n^5}$

Đáp số: $a)\ 2$ $\quad b)0$ $\quad c)+\infty$ $\quad d)-1$ $\quad e)\frac{27}{4}$

Bài 2. Tính các giới hạn:

$a)\lim\frac{\sqrt{2n^4+n^2-7}}{2n^2-n+3};$ $\quad b)\lim\frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n};$ $\quad c)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3n^2+14}+n}{1-2n^2};$ $\quad d)\lim\frac{\sqrt[3]{2n^3+n}}{n+2}$

Đáp số: $a)\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad b)\sqrt{3}-1$ $\quad c)0$ $\quad d)\ \sqrt[3]{2}$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

$a)\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ $\quad b)\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-n+2\right)$ $\quad c)\ \lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$

$d)\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ $\quad e)\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}-n}$ $\quad f)\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)$

$g)\ \lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n+2\right)$

Hướng dẫn và đáp số: Nhân lượng liên hiệp

$a)0$ $\quad b)\ \frac{7}{2}$ $\quad c)-\frac{2}{3}$ $\quad d)\frac{1}{2}$ $\quad e)1$ $\quad f)\frac{3}{2}$ $\quad g)3$

Dạng 5. Sử dụng công thức tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn, tìm giới hạn, biểu thị một số thập phân vô hạn tuần hoàn thành phân số

Phương pháp: Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội là $|q|<1$.

- Tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \frac{u_1}{1-q}$$

- Mọi số thập phân đều được biểu diễn dưới dạng luỹ thừa của 10

$$X = N,a_1a_2a_3...a_n... = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a^n}{10^n} + ...$$

I. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Viết số thập phân m=0,030303...(chu kỳ 03) dưới dạng số hữu tỉ.

Giải

$$m = 3 + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + ... + \frac{3}{100^n} = 3 + \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 3 + \frac{3}{99} = 3 + \frac{1}{33} = \frac{100}{33}$$

Ví dụ 2. Tính tổng $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - ...$

Giải

Xét dãy: 2,-$\sqrt{2}$,1,$-\frac{1}{\sqrt{2}}$,... là cấp số nhân $q = \frac{-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; |q| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

Vậy $S = \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 4 - 2\sqrt{2}$

II. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Hãy viết số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng một phân số. $\alpha = 34{,}1212...$ (chu kỳ 12).

Hướng dẫn và đáp số

$$\alpha = 34{,}1212... = 34 + \frac{12}{100} + \frac{12}{100^2} + ... + \frac{12}{100^n} = 34 + 12\left(\frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}}\right) = \frac{1134}{33}$$

Bài 2. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

a) $S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{4^{n-1}} + ...$ b) $S = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ...$

Hướng dẫn :a) $q = \frac{1}{4}; S = \frac{4}{3}$ b) $q = \frac{2-\sqrt{2}}{2}; S = 4 + 3\sqrt{2}$

Bài 3. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn có tổng S=3 và công bội $q = \frac{2}{3}$.

Đáp số: Cấp số nhân lùi vô hạn đó là: $1; \frac{2}{3}; \frac{4}{9}; ... \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Bài 4. Tìm cấp số nhân lùi vô hạn, biết tổng S=6. Tìm hai số hạng đầu $u_1 + u_2 = 4\frac{1}{2}$

Hướng dẫn: $\begin{cases} S=\dfrac{u_1}{1-q}=6 \\ u_1+u_1q=4\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=6(1-q) \\ u_1(1+q)=4\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow q=\pm\dfrac{1}{2}$

Bài 5. Giải phương trình sau: $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+...+(-1)^n x^n+...=\dfrac{13}{6}$ với $|x|<1$

Hướng dẫn: Dãy số $x^2,-x^3,x^4,-x^5,...,(-1)^n x^n...$ là một cấp số nhân với công bội $q=-x$.

ĐS: $x=\dfrac{1}{2};\ x=-\dfrac{7}{9}$

Bài 6.

a) Tính tổng $S=1+0,9+(0,9)^2+(0,9)^3+....+(0,9)^{n-1}+...$

b) Cho $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$. Tính tổng $S=1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+...$

c) Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số hữu tỉ

a = 0,272727...... b = 0,999999999...........

d) Cho dãy $\{b_n\}=\sin\alpha+\sin^2\alpha+\sin^3\alpha+...+\sin^n\alpha$ với $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. Tìm giới hạn dãy b_n.

Hướng dẫn:

a) $S=\dfrac{1}{1-0,9}=10$

b) $S=\dfrac{1}{1+\tan\alpha}$

$a=0+\dfrac{2}{10}+\dfrac{7}{10^2}+\dfrac{2}{10^3}+\dfrac{7}{10^4}+...$

$=\dfrac{2}{10}+\dfrac{2}{10^3}+...+\dfrac{2}{10^{2n-1}}+...+\dfrac{7}{10^2}+\dfrac{7}{10^4}+....=2\dfrac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10^2}}+7\dfrac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10^2}}=\dfrac{3}{11}$

$b=\dfrac{9}{10}.\dfrac{1}{1-\frac{1}{10}}=1$

c) Cấp số nhân lùi vô hạn

d) $\lim b_n=\dfrac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$

Bài 9. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a+aa+...+\overbrace{aaa...a}^{n\text{ số hạng}}}{10^n}$

Hướng dẫn: Ta có

$$a + aa + ... + \underbrace{aaa..a}_{n \text{ số hạng}} = a\left(1 + 11 + ... + \underbrace{111..1}_{n \text{ số hạng}}\right) = a\left(\frac{10-1}{9} + \frac{100-1}{9} + ... + \frac{10^n - 1}{9}\right)$$

$$= a\frac{10\left(10^n - 1\right) - 9n}{81}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a + aa + ... + \underbrace{aaa..a}_{n \text{ số hạng}}}{10^n} = \frac{10a}{81}\left(\frac{10^n - 1 - 9n}{10^n}\right) = \frac{10a}{81}$

Dạng 6. Tìm giới hạn vô cùng của một dãy bằng định nghĩa

Phương pháp

- $\lim u_n = +\infty$ khi và chỉ khi u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$

Ví dụ 1. Dùng định nghĩa giới hạn của dãy số. Chứng minh:

a) $\lim \frac{n^2 + 2}{n+1} = +\infty$ b) $\lim \sqrt[3]{1 - n^3} = -\infty$

Hướng dẫn:

a) Lấy số dương M lớn tùy ý.

$u_n = \frac{n^2 + 2}{n+1} > \frac{n^2 - 1}{n+1} = n - 1 > M \Leftrightarrow n > M + 1;$

Chọn $n_0 > M + 1, n_0 \in \mathbb{N}$. Khi đó: $\forall n > n_0 \Rightarrow n > M + 1 \Rightarrow u_n = \frac{n^2 + 2}{n+1} > M$. Vậy $\lim u_n = +\infty$

b) Ta có: $1 - n^3 = (1-n)(n^2 + n + 1) \le 1 - n; \forall n \in \mathbb{N}$

Lấy số dương M lớn tùy ý.

$u_n = \sqrt[3]{1 - n^3} \le \sqrt[3]{1 - n^3} < -M \Leftrightarrow n > M^3 + 1;$ chọn $n_0 > M^3 + 1, n_0 \in \mathbb{N}$.

Khi đó: $\forall n > n_0 \Rightarrow n > M^3 + 1 \Rightarrow u_n = \sqrt[3]{1 - n^3} < -M$. Vậy: $\lim u_n = -\infty$

Ví dụ 2. Cho dãy (u_n) thoả mãn $u_n > \sqrt{n}$ với mọi n. Chứng minh rằng $\lim u_n = +\infty$

Giải

$\lim \sqrt{n} = +\infty$ vì vậy $\sqrt{n}$ lớn hơn một số dương bất kì kể từ một số hạng nào đó trở đi. mặt khác $u_n > \sqrt{n}$ nên u_n lớn hơn một số dương bất kì kể từ một số hạng nào đó.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Ví dụ 3. Biết dãy số (u_n) thoả mãn $u_n > n^2$ với mọi n. Chứng minh rằng $\lim u_n = +\infty$

Giải

Vì $\lim n^2 = +\infty$ nên n^2 có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi

Mặt khác, theo giả thiết $u_n > n^2$ với mọi n, nên u_n cũng có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi. Vậy $\lim u_n = +\infty$.

Ví dụ 4. Cho biết $\lim u_n = -\infty$ và $v_n < u_n$ với mọi n. Có kết luận gì về giới hạn v_n.

Hướng dẫn

$\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty \Rightarrow -v_n > -u_n \Rightarrow \lim(-v_n) = +\infty$

Vậy $\lim v_n = -\infty$

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) hội tụ, dãy (v_n) không hội tụ. Có kết luận gì về sự hội tụ của dãy $(u_n \pm v_n)$.

Hướng dẫn: Kết luận dãy $(u_n \pm v_n)$ không hội tụ

Thật vậy:

Xét dãy $(u_n \pm v_n)$, giả sử nó hội tụ nghĩa là $\lim(u_n \pm v_n) = a$ và $\lim u_n = b$.
Khi đó $\lim u_n + \lim v_n = a$
Vậy $\lim v_n = a - \lim u_n$
Vì $\lim u_n = b \Rightarrow \lim v_n = a - b$
Vậy (v_n) là hội tụ, điều này không đúng.
Vậy dãy $(u_n \pm v_n)$ không hội tụ.

Ví dụ 6.

a) Cho hai dãy (u_n) và (v_n). Biết $\lim u_n = -\infty$ và $v_n \le u_n$ với mọi n.

Có kết luận gì về giới hạn của dãy (v_n) khi $n \to +\infty$?

b) Tìm $\lim v_n$ với $v_n = -n!$

Hướng dẫn

a) Vì $\lim u_n = -\infty$ ňn $\lim(-u_n) = +\infty$. Do đó, (u_n) có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. (1)

Mặt khác, vì $v_n \le u_n$ với mọi n nên $(-v_n) \ge (-u_n)$ với mọi n. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ($-v_n$) có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Do đó, $\lim(-v_n) = +\infty$ hay $\lim v_n = -\infty$.

b) Xét dãy số (u_n)=-n.

Ta có: $-n! < -n$ hay $v_n < u_n$ với mọi n. Mặt khác $\lim u_n = \lim(-n) = -\infty$. Từ kết quả câu a) suy ra $\lim v_n = \lim(-n!) = -\infty$

Dạng 7. Tìm giới hạn của một dãy bằng cách sử dụng định lý, quy tắc tìm giới hạn vô cực

Phương pháp

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn của các dãy số (u_n) với

$$a)\ u_n = -n^8 - 50n + 11;\quad b)\ u_n = \sqrt[3]{109n^2 - n^3};\quad c)\ u_n = \sqrt{105n^2 - 3n + 27};\quad d)\ u_n = \sqrt{8n^3 + n^2 - 2}$$

Đáp số: a) $-\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $+\infty$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn của các dãy số (u_n) với

$$a)\ u_n = \frac{3n - n^3}{2n + 19};\quad b)\ u_n = \frac{\sqrt{2n^4 - n^2 + 7}}{3n + 5};\quad c)\ u_n = \frac{2n^2 - 15n + 11}{\sqrt{3n^2 - n + 3}};\quad d)\ u_n = \frac{(2n+1)(1-3n)}{\sqrt[3]{n^3 + 7n^2 - 5}}$$

Đáp số: a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$

Ví dụ 3: Tính các giới hạn

$$a)\ \lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 4}};\qquad b)\ \lim\left(\sqrt{2n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 1}\right)$$

Ví dụ 4: Tính các giới hạn

$a)\lim\left(3.2^n-5^{n+1}+10\right);$ $\quad$ $b)\ \lim\frac{3^n-11}{1+7.2^n};$ $\quad$ $c)\lim\frac{2^{n+1}-3.5^n+3}{3.2^n+7.4^n}$

Đáp số: $a)-\infty;$ $\quad$ $b)+\infty;$ $\quad$ $c)-\infty;$

MỘT SỐ DẠNG TOÁN NÂNG CAO {Tham khảo}

Dạng 1. Tính giới hạn của dãy số có quy luật

Ví dụ 1 :Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\sqrt{1+2+3+...+n}}{n^2+n+1}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$

Hướng dẫn

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\sqrt{1+2+3+...+n}}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\sqrt{n\left(\dfrac{1+n}{2}\right)}}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\sqrt{n^2+n}}{\left(n^2+n+1\right)\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$ với $|a|<1,|b|<1$; b) $\lim\dfrac{n\sqrt{1+3+...+2n-1}}{2n^2+n+1}$

Hướng dẫn

a) $S=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1-a}}{\dfrac{1}{1-b}}=\dfrac{1-b}{1-a}$ b) $S=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\sqrt{1+3+...+2n-1}}{2n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\sqrt{\dfrac{\left(1+2n-1\right)n}{2}}}{2n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 3. Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{3.4.5}+...+\dfrac{1}{n(n+1)\left(n+2\right)}\right)$

Hướng dẫn

Sử dụng: $\dfrac{1}{k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k\left(k+1\right)}-\dfrac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}\right]$

Vậy: $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+...+\dfrac{1}{n.\left(n+1\right)\left(n+2\right)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\right]$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{3.4.5}+...+\dfrac{1}{n(n+1)\left(n+2\right)}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\right]=\dfrac{1}{4}$

Ví dụ 4. Tính giới hạn $\lim\left(1-\dfrac{2}{2.3}\right)\left(1-\dfrac{2}{3.4}\right)...\left(1-\dfrac{2}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\right)$

Hướng dẫn

Ta thấy: $1-\dfrac{2}{k\left(k-1\right)}=\dfrac{\left(k-1\right)\left(k+2\right)}{k\left(k+1\right)}$

Vậy: $\left(1-\dfrac{2}{2.3}\right)\left(1-\dfrac{2}{3.4}\right)...\left(1-\dfrac{2}{k.\left(k+1\right)}\right)...\left(1-\dfrac{2}{n.\left(n+1\right)}\right)$

$=\dfrac{1.4}{2.3}.\dfrac{2.5}{3.4}...\dfrac{\left(k-1\right)\left(k+2\right)}{k\left(k+1\right)}...\dfrac{\left(n-1\right)\left(n+2\right)}{n\left(n+1\right)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{2.3}\right)\left(1-\dfrac{2}{3.4}\right)...\left(1-\dfrac{2}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\right)=\dfrac{1}{3}$

Bài tập áp dụng: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2.1^2+3.2^2+...+(n+1)n^2}{n^4}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\right)$

d*) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}\right)$

Hướng dẫn và đáp số

a) $S_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]$ nên $\lim S_n=\frac{1}{2}$

b) Ta có: $S_n=2.1^2+3.2^2+...+(n+1)n^2=(1+1)1^2+(2+1)2^2+...+(n+1)n^2$

$S_n=1^3+2^3+...+n^3+1^2+2^2+....+n^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\lim\frac{S_n}{n^4}=\lim\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}\right]=\frac{1}{4}$

c) Ta có: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$S_n=\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

$=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow\lim S_n=1$

d) Ta có: $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}$

$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+...+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

Suy ra: $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\Leftrightarrow S_n=3-\frac{1}{2^{n-3}}-\frac{2n}{2^n}+\frac{1}{2^n}$

Mặt khác: $\left|\frac{n}{2^n}\right|=\frac{n}{(1+1)^n}<\frac{2}{n-1}$. Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n-1}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=3$

Dạng 2. Dùng nguyên lí kẹp

Phương pháp

Cho ba dãy số (u_n), (v_n) và (w_n). Nếu

$$u_n \le v_n \le w_n \text{ với mọi } n$$

Và $\lim u_n = \lim w_n = L (L \in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n = L$

Ví dụ mẫu. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+....+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

Giải

Ta thấy:

$$\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+....+\frac{n}{n^2+n} \ge \frac{1+2+...+n}{n^2+n}=\frac{1}{2}$$

Và $\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+....+\frac{n}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+...+\frac{n}{n^2+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$

Vậy $\frac{1}{2} \le \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+....+\frac{n}{n^2+n} \le \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\frac{1}{2}$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+....+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$

BÀI TẬP RÈN LUYÊN

Bài 1. Tính giới hạn của các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+\sin n}{3n+4}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin 2n+\cos 2n}{3n+1}$ e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n+3n^2}{\cos n+5n^2}$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

Hướng dẫn và đáp số

a) $0<\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Đs: 0

b) $\frac{-5}{n+1}\le u_n\le\frac{5}{n+1}$. Đs: 0

c) $-1\le \sin n\le 1\Rightarrow \frac{n-1}{3n+4}\le\frac{n+\sin n}{3n+4}\le\frac{n+1}{3n+4}$. ĐS: $\frac{1}{3}$

d) Tương tự câu b

e) $-\frac{1}{n^2}\le\frac{\cos n}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$. Ta có: $\lim\left(-\frac{1}{n^2}\right)=\lim\left(\frac{1}{n^2}\right)=0\Rightarrow \lim\frac{\cos n}{n^2}=0$

Nên: $\lim\frac{(-1)^n+3n^2}{\cos n+5n^2}=\lim\frac{\frac{(-1)^n}{n^2}+3}{\frac{\cos n}{n^2}+5}=\frac{3}{5}$

f) $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

$\Rightarrow\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le u_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Ta có: $\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$

Dạng 3. Chứng minh một dãy số có giới hạn

Phương pháp

1. **Áp dụng định lý Vâyostraxơ:**

- Nếu dãy số (u_n) tăng và bị chặn trên thì nó có giới hạn.
- Nếu dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới thì nó có giới hạn.

2. **Chứng minh một dãy số tăng và bị chặn trên (dãy số tăng và bị chặn dưới) bởi số M ta thực hiện**: Tính một vài số hạng đầu tiên của dãy và quan sát mối liên hệ để dự đoán chiều tăng (chiều giảm) và số M.
3. **Tính giới hạn của dãy số ta thực hiện theo một trong hai phương pháp sau**:

*** Phương pháp 1:**

- Đặt $\lim u_n=a$
- Từ $\lim u_{n+1}=\lim f(u_n)$ ta được một phương trình theo ẩn a.
- Giải phương trình tìm nghiệm a và giới hạn của dãy (u_n) là một trong các nghiệm của phương rình. Nếu phương trình có nghiệm duy nhất thì đó chính là giới hạn cảu dãy cần tìm. còn nếu phương trình có nhiều hơn một nghiệm thì dựa vào tính chất của dãy số để loại nghiệm.
- **Chú ý:** Giới hạn của dãy số nếu có là duy nhất.

*** Phương pháp 2:**

- Tìm công thức tổng quát u_n của dãy số bằng cách dự đoán./
- Chứng minh công thức tổng quát u_n bằng phương pháp quy nạp toán học.
- Tính giới hạn của dãy thông qua công thức tổng quát đó.

I. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Chứng minh dãy (u_n) bởi công thức truy hồi $\begin{cases}u_1=\sqrt{2}\\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n} \text{ với } n\ge 1\end{cases}$.

Chứng minh dãy có giới hạn, tìm giới hạn đó.

Giải

Ta có: $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, u_n > 0$ với $\forall n \in N$

❖ Ta chứng minh : $u_n < 2$ với $\forall n \in N$ (1)

Với n=1, ta có $u_1 = \sqrt{2} < 2$ thì (1) đúng
Giả sử bất bất đẳng thức đúng với n=k thì $u_k < 2$.
Vậy $u_n < 2, \forall n \in N$

❖ Chứng minh dãy (u_n) tăng:

Xét $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \sqrt{2+u_n} > u_n \Leftrightarrow u_n^2 - u_n - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < u_n < 2$
Mà $0 < u_n < 2$ nên $u_{n+1} > u_n$. Vậy (u_n) là dãy tăng (2)
Từ (1) và (2) suy ra (u_n) có giới hạn.

❖ Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $0 \le a \le 2$

Ta có:

$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2+u_n}$
$\Rightarrow a = \sqrt{2+a} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$ hoặc a=2
Vì $u_n > 0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \ge 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$
Lưu ý: Trong lời giải trên, ta đã áp dụng tính chất sau:
" Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = a$"

Ví dụ 2. Cho dãy (u_n) bởi công thức truy hồi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Giải

Ta có :

$u_1 = 2; u_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{2+1}{2}; u_3 = \frac{4}{3} = \frac{3+1}{3}; u_4 = \frac{5}{4}$. Từ đó ta dự đoán: $u_n = \frac{n+1}{n}$ (1)
Chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp:
– Với n=1, ta có: $u_1 = 2$ (đúng)
– Giả sử đẳng thức (1) đúng với n=k ($k \ge 1$), nghĩa là $u_k = \frac{k+1}{k}$.
...
– Vậy $u_n = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Từ đó ta có $\lim u_n = \lim \frac{n+1}{n} = 1$

BTTT. Cho dãy (u_n) bởi công thức truy hồi $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \text{ nếu } n \ge 1 \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn: $\lim u_n = \lim \frac{n}{n+1} = 1$

Ví dụ 3. Chứng minh dãy (u_n) được cho bởi công thức $u_n = \sin n; n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy không có giới hạn.

Hướng dẫn

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin n = a$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+2) = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sin(n+2)-\sin n\right]=0$

$\Leftrightarrow 2\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(n+1)\sin 1 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\cos(n+1)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\cos n = 0$

mặt khác: $\cos(n+1) = \cos n\cos 1 - \sin n \sin 1$, Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n = 0$

Suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos^2 n + \sin^2 n\right) = 0$, vô lý

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = \sin n$ không có giới hạn.

II. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Chứng minh dãy (uₙ) với $u_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{\text{n dấu căn}}$ là dãy hội tụ.

Hướng dẫn

- **Bước 1:** Chứng minh dãy (uₙ) tăng
- **Bước 2:** Chứng minh (uₙ) bị chặn trên

Bài 2. Cho dãy truy hồi $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}+3}{4} \ (n \ge 2) \end{cases}$. Tìm giới hạn của dãy.

Hướng dẫn và đáp số

$u_1 = 0$

$u_2 = \dfrac{3}{4} = 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^1$

$u_2 = \dfrac{15}{16} = 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

.
.
.

$u_n = 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

bằng phương pháp quy nạp chứng minh $u_n = 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right] = 1$

Bài 3. Cho dãy truy hồi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}+1}{2} \ (n \ge 2) \end{cases}$. Chứng minh dãy (uₙ) có giới hạn, tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn và đáp số

Cách 1

Dự đoán $u_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^n-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{n-1}+1}{2^n-1} = 1$

Cách 2

- Chứng minh dãy giảm và bị chặn dưới.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, tìm a

- Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = a = \frac{a+1}{2} \Leftrightarrow a = 1$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Bài 4.

a) Cho dãy truy hồi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \ (n \ge 1) \end{cases}$. Chứng minh dãy ($u_n$) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

b) Cho dãy (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ u_{n+1}\left(1-u_n\right) > \frac{1}{4} \quad (n \ge 1) \end{cases}$. Chứng minh dãy ($u_n$) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn và đáp số

b) * Chứng minh (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên

Ta có: $0 < u_n < 1, n \in N$

Áp dụng bất đẳng thức cauchy

$u_{n+1} + \left(1-u_n\right) \ge 2\sqrt{u_{n+1}\left(1-u_n\right)} \ge 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, n \in N^*$

Vậy (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên thì (u_n) thì dãy có giới hạn

* Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a, a > 0$

Ta có: $u_{n+1}\left(1-u_n\right) \ge \frac{1}{4} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left[u_{n+1}\left(1-u_n\right)\right] \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow a\left(1-a\right) \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \le 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Bài 5. Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ và $u_1 > 0$

a) Chứng minh rằng $u_n \ge \sqrt{2}$ với mọi $n \ge 2$

b) Chứng minh dãy (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn và đáp số

a) Ta có: $u_1 > 0, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \Rightarrow u_n > 0, \forall n \in N^*$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si:

$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \ge \sqrt{u_n.\frac{2}{u_n}} = \sqrt{2}, \forall n \ge 1, n \in\Leftrightarrow N$

Suy ra $u_n > \sqrt{2}, \forall n \ge 2, n \in N$

b) Ta có: $u_n > \sqrt{2}, n \ge 2, n \in N$ nên $\left(u_n\right)$ là dãy bị chặn dưới

Xét $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{u_n}\left(1 - \frac{u_n^2}{2}\right) < 0, \forall n \ge 2, n \in N$ nên $u_{n+1} < u_n, \forall n \in N^*$

* Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a, a \ge \sqrt{2}$. Ta có:

$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$

Bài 6. Chứng minh dãy (uₙ) được cho bởi công thức $u_n = \cos n; n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy không có giới hạn.

Hướng dẫn

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n+2) = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\cos(n+2) - \cos n\right] = 0$

$\Leftrightarrow -2\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+1)\sin 1 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+1) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sin n = 0$

mặt khác: $\sin(n+1) = \sin n\cos 1 + \cos n \sin 1$, Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n = 0$

Suy ra : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos^2 n + \sin^2 n\right) = 0$, vô lý

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = \cos n$ không có giới hạn.

Bài 7. Chứng minh các dãy sau hội tụ:

a) $\alpha_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}; n \in N$

b) $\alpha_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n}; n \in N$

Hướng dẫn

a) Ta thấy

Dãy $\alpha_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ là dãy tăng, ta chỉ cần chứng minh dãy bị chặn.

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$

Vậy dãy hội tụ.

b)

Dãy $\alpha_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n}$ là dãy tăng, ta chỉ cần chứng minh dãy bị chặn.

$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n} \le 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 2$

Vậy dãy bị chặn trên nên hội tụ.

BÀI 2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn hàm số tại một điểm

a) Giới hạn hữu hạn

Định nghĩa: Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số y=f(x) xác định trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$.

Ta nói hàm số y=f(x) có giới hạn là số L khi x dần đến x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in K\setminus\{x_0\}, \lim x_n = x_0 \Rightarrow \lim f(x_n) = L}$$

b) Giới hạn vô cực

Các định nghĩa về giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) của hàm số được phát biểu tương tự các định ở trên

Chẳng hạn, giới hạn $-\infty$ của hàm số y=f(x) khi x dần đến dương vô vực được định nghĩa như sau:

Định nghĩa: Cho hàm số y=f(x) xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số y=f(x) có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có: $f(x_n) \to -\infty$. **Kí hiệu:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \to -\infty$ khi $x \to +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n > a, \lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim f(x_n) = -\infty}$$

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x) = -\infty$

*** Các giới hạn đặc biệt:**

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x} = 0$ với c là hằng số

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu k nguyên dương} \\ 0 & \text{nếu k nguyên âm} \end{cases}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu k chẵn} \\ -\infty & \text{nếu k lẻ} \end{cases}$

2. Giới hạn hàm số tại vô cực

Định nghĩa

- Cho hàm số y=f(x) xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số y=f(x) có giới hạn là số L khi khi $x \to +\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ ta có: $f(x_n) \to L$.

  Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$

  $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n > a, \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L}$$

- Cho hàm số y=f(x) xác định trên khoảng $(-\infty;a)$. Ta nói hàm số y=f(x) có giới hạn là số L khi khi $x \to -\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$ ta có: $f(x_n) \to L$.

  Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$

  $$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n < a, \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L}$$

3. Một số định lí về giới hạn hữu hạn

Định lý 1:

Giải sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó:

$* \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=L\pm M$

$* \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$

$* \lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{L}{M}$ (nếu $M\neq 0$)

Định lý 2: Giải sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|L|$

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{L}$

c) Nếu $f(x)\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì: $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$

(Dấu của f(x) được xác định trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x\neq x_0$)

4. Giới hạn một bên

Định nghĩa1: Cho hàm số y=f(x) xác định trên khoảng $(x_0;b)$. Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số y=f(x) khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ ta có: $f(x_n)\to L$. **Kí hiệu:** $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L\Leftrightarrow\forall(x_n), x_0<x_n<b, \lim x_n=x_0\Rightarrow\lim f(x_n)=L}$$

Định nghĩa 2: Cho hàm số y=f(x) xác định trên khoảng $(a;x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số y=f(x) khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$ ta có: $f(x_n)\to L$. **Kí hiệu:** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L\Leftrightarrow\forall(x_n), a<x_n<x_0, \lim x_n=x_0\Rightarrow\lim f(x_n)=L}$$

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

5. Giới hạn vô cực

Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$; được phát biểu tương tự định nghĩa 1 và định nghĩa 2.

Định lý: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$

6. Các quy tắc tính giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$
L>0	$+\infty$	$+\infty$

	$-\infty$	$-\infty$
L<0	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của tích $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tuỳ ý	0
L>0	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
L<0		+	$-\infty$
		-	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to +\infty, x \to -\infty$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Dùng định nghĩa để tìm giới hạn

Phương pháp

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in K\setminus\{x_0\}, \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=L$

2. Để chứng minh hàm số f(x) không có giới hạn khi $x\to x_0$ ta thực hiện:

Chọn hai dãy số khác nhau (x_n) và (y_n) thoả mãn: x_n, y_n thuộc tập xác định của hàm số và khác x_0

- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x_0$
- Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$ hoặc một trong hai giới hạn đó không tồn tại

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$. Dùng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

Giải

Hàm số y=f(x) xác định trên $R\setminus\{1\}$. Giả sử (x_n) là dãy số bất kì $x_n\neq 1$ và $x_n\to 1$

$$\lim f(x_n)=\lim\frac{x_n^2+x_n-2}{x_n-1}=\lim\frac{(x_n+2)(x_n+1)}{x_n-1}=\lim(x_n+2)=3$$

BTTT: Cho hàm số: $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$. Dùng định nghĩa chứng minh: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x & \text{nếu } x\geq 0 \\ 2-x & \text{nếu } x<0\end{cases}$. Dùng định nghĩa chứng minh hàm số y=f(x) không có giới hạn khi $x\to 0$

Giải

Xét dãy $(x_n)=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}\to 0 \qquad \left(\dfrac{1}{n}>0\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ (1)

Xét dãy $(x_n)=\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}$ khi $n\to+\infty; x_n\to 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$ (2)

Vậy với (1) và (2) hàm số không có giới hạn khi $x\to 0$

BTTT: Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases} x & \text{nếu } x\geq 0 \\ 1-x & \text{nếu } x<0\end{cases}$. Dùng định nghĩa chứng minh hàm số không có giới hạn khi $x\to 0$

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x)=\cos\dfrac{1}{x^2}$. Dùng định nghĩa chứng minh rằng hàm số f(x) không có giới hạn khi x dần đến 0.

Hướng dẫn

Hàm số : $f(x)=\cos\frac{1}{x^2}$ xác định trên K=R\{0}

*Lấy dãy số $(x_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\in K$ và $\lim x_n=0;\lim f(x_n)=\lim\cos\frac{1}{x_n^2}=\lim\cos(2n\pi)=1$

*Lấy dãy số $(y_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}}\in K$ và $\lim y_n=0;\lim f(y_n)=\lim\cos\frac{1}{y_n^2}=\lim\cos(2n\pi+\frac{\pi}{2})=0$

Vậy hàm số không có giới hạn.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Dùng định nghĩa chứng minh các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}=-6$; b) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$; c) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x+3}{3-x}=-4$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^2+1}=+\infty$

Hướng dẫn

a) $\forall(x_n),x_n\neq-3,\lim x_n=-3\Rightarrow\lim\frac{x_n^2-9}{x_n+3}=-6$

b) $\forall(x_n),x_n\in(1;+\infty),\lim x_n=1\Rightarrow\lim\frac{1}{\sqrt{x_n^2-1}}=+\infty$

c) $\forall(x_n),x_n\neq3,\lim x_n=5\Rightarrow\lim\frac{x_n+3}{3-x_n}=\frac{5+3}{3-5}=-4$

d) $\forall(x_n),\lim x_n=+\infty\Rightarrow\lim\frac{x_n^3+1}{x_n^2+1}=\lim\frac{x_n+\frac{1}{x_n^2}}{1+\frac{1}{x_n^2}}=+\infty$

Bài 2.

1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{nếu } x\geq0\\ x^2-1 & \text{nếu } x<0\end{cases}$.

   a. Vẽ đồ thị hàm số f(x). Từ đó dự đoán về giới hạn của f(x) khi $x\to0$.

   b. Dùng định nghĩa chứng minh dự đoán trên.

Hướng dẫn

a) Dự đoán: Hàm số không có giới hạn khi $x\to0$

b) Lấy hai dãy số có số hạng tổng quát là $a_n=\frac{1}{n}$; và $b_n=-\frac{1}{n}$

2. Cho hàm số $f(x)=\sin\frac{1}{x^2}$. Chứng minh hàm số không có giới hạn khi $x\to0$.

Bài 3.

a) Chứng minh rằng hàm số y=sinx không có giới hạn khi $x\to+\infty$

b) Giải thích bằng đồ thị kết luận câu a)

Hướng dẫn: Xét hai dãy (a_n) với $a_n=2n\pi$ và (b_n) với $b_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$

Bài 4. Cho hai hàm số y=f(x) và y=g(x) cùng xác định trên khoảng $(-\infty;a)$. Dùng định nghĩa chứng minh rằng, nếu $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=M$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)g(x)=L.M$

Hướng dẫn

Giả sử (x_n)là dãy bất kì thõa mãn $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$. Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = M$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = M.$ Do đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n).g(x_n) = L.M.$

Từ định nghĩa suy ra: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x).g(x) = L.M$

Bài 5. Cho hàm số y=f(x) xác định trên $(a;+\infty)$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ thì luôn tồn tại ít nhất một số c thuộc $(a;+\infty)$ sao cho f(c)<0.

Hướng dẫn

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ nên với dãy số (x_n) bất lỳ, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ ta luôn có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$.

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-f(x_n)\right] = +\infty$

Từ định nghĩa suy ra $-f(x_n)$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. **Bài 6.** Cho

Nếu số dương này là 2 thì $-f(x_n) > 2$ kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nói cách khác, luôn tồn tại ít nhất một số $x_k \in (a;+\infty)$ sao cho $-f(x_k) > 2$ hay $f(x_k) < -2 < 0$

Đặt $c = x_k$, ta có $f(c) < 0$

khoảng K, $x_0 \in K$ và hàm số f(x) xác định trên $K\setminus\{x_0\}$.

Bài 6. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ thì luôn tồn tại ít nhât một số c thuộc $K\setminus\{x_0\}$ sao cho f(c)>0.

Hướng dẫn

Vì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ nên với dãy số (x_n) bất lỳ, $x_n \in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ ta luôn có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$.

Từ định nghĩa suy ra $f(x_n)$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nếu số dương này là 1 thì $f(x_n) > 1$ kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nói cách khác, luôn tòn tại ít nhất một số $x_k \in K\setminus\{x_0\}$ sao cho $f(x_k) > 1$.

Đặt $c = x_k$, ta có $f(c) > 0$

Dạng 2. Tìm giới hạn của hàm số bằng công thức

Phương pháp: Để tìm giới hạn của hàm số thuộc dạng vô định ta thực hiện:

1. Nếu f(x) là hàm số sơ cấp xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(x_0\right)$
2. Áp dụng các định lý tính giới hạn và các quy tắc về giới hạn $\pm\infty$

Ví dụ 1. Tính các giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{2+x^2}-1\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-1}{x+3}$; e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x+2}$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{2+x^2}-1\right)=\sqrt{2+1}-1=\sqrt{3}-1$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-1}{x+3}=\frac{3-1}{3+3}=\frac{1}{3}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x+2}=\frac{0}{4}=0$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn của hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt{x^2+5}-1\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+5x^2+10x-1\right)$; c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+5}{x+5}$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin^6 x-5\cos^6 x}{1+\sin^4 x-\cos^4 x}$

Hướng dẫn và đáp số

a) 2 b) -1 c) $\frac{3}{2}$

d) $f(x)=\frac{1+\sin^6 x-5\cos^6 x}{1+\sin^4 x-\cos^4 x}$ xác định tại $x=\frac{\pi}{2}$ nên $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\frac{1+1-5.0}{1+1-0}=1$

Ví dụ 3: Tìm các giới hạn của hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-x}{(x-4)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+5}{(x+5)^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{1-x}{(x-4)^2}$

Đáp số

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to 4}(3-x)=-1<0$ và $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)^2=0$ nên $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-x}{(x-4)^2}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x+1}=+\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\left(2-\frac{3}{x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\left(x^2-x-6\right)^2}{x^3+2x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to -3}\left|\frac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$

Đáp số: a) -3; b) $-\frac{1}{54}$; c) -1; d) 0; e) $\frac{5}{3}$

Ví dụ 5. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-3}}$

Đáp số: a) 0; b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; c) $-\sqrt{2}$

Dạng 3. Sử dụng định nghĩa tìm giới hạn một bên

Phương pháp

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow \forall(x_n), x_0<x_n<b, \lim_{n\to+\infty} x_n=x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n)=L$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow \forall(x_n), a<x_n<x_0, \lim_{n\to+\infty} x_n=x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n)=L$$

Ví dụ 1. Sử dụng định nghĩa tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^2+3x-4}$

Ví dụ 2. Sử dụng định nghĩa tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{2x-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 7^-} \left(\sqrt{7-x}+3x\right)$

Dạng 4. Sử dụng định lý và công thức tìm giới hạn một bên

Phương pháp

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

I. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3 & \text{nếu } x<3 \\ 1 & \text{nếu } x=3 \\ 3-2x^2 & \text{nếu } x>3 \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Hướng dẫn

* $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(3-2x^2\right)=3-2.3^2=-15$
* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x^2-2x+3\right)=3^3-2.3+3=6$
* $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ nên hàm số không có giới hạn khi $x\to 3$

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)=1+|2x-6|$. Tính $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Hướng dẫn

Ta có: $|2x-6|=\begin{cases} 2x-6 & \text{nếu } x\ge 3 \\ -2x+6 & \text{nếu } x<3 \end{cases}$ nên $f(x)=\begin{cases} 2x-5 & \text{nếu } x\ge 3 \\ -2x+7 & \text{nếu } x<3 \end{cases}$

* $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(2x-5)=2.3-5=1$
* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-5)=-2.3+7=1$
* $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 3} f(x)=1$

Ví dụ 3. Cho hàm số:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & \text{nếu } x>1 \\ mx+2 & \text{nếu } x\le 1 \end{cases}$$

Tìm giá trị của m để hàm số f(x) có giới hạn khi $x\to 1$. Tính giới hạn đó

Giải

$$* \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x^2+x+1} = 1$$

$$* \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(mx+2) = m+2$$

Hàm số $f(x)$ có giới hạn thì $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Leftrightarrow 1 = m+2 \Leftrightarrow m=-1$

* khi đó $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$; b) $\lim_{x\to 3^-}\frac{9-x^2}{\sqrt{6-2x}}$; c) $\lim_{x\to 4^-}\frac{\sqrt{x^2-5x+4}}{\sqrt{16-x^2}}$

II. Bài tập rèn luyện

Bài tập 1.

a) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{nếu } x>1\\ x^2+x+1 & \text{nếu } x\le 1\end{cases}$. Tính $\lim_{x\to 1^+} f(x)$; $\lim_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim_{x\to 1} f(x)$

b) Cho hàm số $f(x)=\frac{5-x}{|x-5|}$. Tính $\lim_{x\to 5^+} f(x)$; $\lim_{x\to 5^-} f(x)$; $\lim_{x\to 5} f(x)$

Đáp số:

a) 3

b) $\lim_{x\to 5^+} f(x) = -1$; $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 1$

Bài tập 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1} & \text{nếu } x<1\\ mx+2 & \text{nếu } x\ge 1\end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số f(x) có giới hạn $x\to 1$

Bài tập 3. Tìm giá trị m để hàm số sau có giới hạn tại x=1

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1} & \text{với } x>1\\ mx+5 & \text{với } x\le 1\end{cases}$$

Bài tập 4. Tìm giá trị của a để hàm số sau có giới hạn tại x=0

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{với } x\ge 0\\ 3x+a & \text{với } x<0\end{cases}$$

Đáp số: a = 0

Bài tập 5. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x-1}$; b) $\lim_{x\to(-2)^+}\frac{|3x+6|}{x+2}$; c) $\lim_{x\to 0^+}\frac{3\sqrt{x}-x}{\sqrt{2x}+x}$

Dạng 5. Tính giới hạn vô cực

Bài 1. Tìm giới hạn hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^3+15}{(x+2)^2}$

Đáp số: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x+1}{\sqrt{4x^2-x+1}}=+\infty$ b) $-\infty$

Bài 2. Tìm giới hạn hàm số sau:

a) $y=f(x)=\sqrt{4x^2+2x+5}$ khi $x\to-\infty$; b) $y=f(x)=3x^2+6x+1$ khi $x\to-\infty$

c) $y=f(x)=\frac{x-15}{x+2}$ khi $x\to-2^+$; d) $y=f(x)=\frac{x-15}{x+2}$ khi $x\to-2^-$

Đáp số: a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$

Dạng 6. Tìm giới hạn của hàm số thuộc dạng vô định $\frac{0}{0}$

Phương pháp:

1. Nhận dạng vô định $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$

2. Phân tích tử và mẫu thành các nhân tử và giản ước

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)A(x)}{(x-x_0)B(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$$ và tính $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$

Nếu phương trình f(x)=0 có nghiệm là x_0 thì $f(x)=(x-x_0).g(x)$

Đặc biệt:

❖ Nếu tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$, mà $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $f(x)$ được phân tích thành $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

❖ Phương trình bậc 3: $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$

- $a+b+c+d=0$ thì pt có một nghiệm là $x_1=1$, để phân tích thành nhân tử ta dùng phép chia đa thức hoặc dùng sơ đồ Hooc-ner
- $a-b+c-d=0$ thì pt có một nghiệm là $x_1=-1$, để phân tích thành nhân tử ta dùng phép chia đa thức hoặc dùng sơ đồ Hooc-ner

3. Nếu u(x) và v(x) có chứa dấu căn thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hiệp, sau đó phân tích chúng thành tích để giản ước.

$A-B$ lượng liên hiệp là: $A+B$
$\sqrt{A}-B$ lượng liên hiệp là: $\sqrt{A}+B$
$\sqrt{A}-\sqrt{B}$ lượng liên hiệp là: $\sqrt{A}+\sqrt{B}$
$\sqrt[3]{A}-B$ lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2}+B\sqrt[3]{A}+B^2\right)$
$\sqrt[3]{A}+B$ lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2}-B\sqrt[3]{A}+B^2\right)$

I. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x}{x-1}$

Giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x=1$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn sau: $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{x+7}-3}$

Giải

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left[-(2-x)\left(\sqrt{x+7}+3\right)\right]=-4.6=-24$$

II. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Tìm các giới hạn của hàm số sau:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{x}$ c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-5x^2+3x+1}{x^4+8x^2-9}$ e) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+4}{x^2+2x}$

Đáp số: a) $\frac{4}{3}$ b) 3 c) 2 d) $-\frac{1}{5}$ e) -5

Bài 2. Tìm các giới hạn của hàm số sau:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{x+7}-3}$ b) $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ c) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x+4}+2}{x-5}$

d) $\lim_{x\to 5}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ e) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{3x-2}+2}$ f) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$

Đáp số: a) -24 b) $2\sqrt{5}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{9}{8}$ e) -16 f) $\frac{1}{6}$

Bài 3. Tính giới hạn của hàm số sau:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$; b) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$; e) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x-1}$; f) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$; h) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-1}$

Đáp số: a) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ b) 3 c) -1 d) $\frac{7}{24}$ e) $\frac{7}{12}$ f) $-\frac{11}{12}$ g) $-\frac{5}{12}$ h) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

Bài 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$; b) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$; c) $\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}$;

d) $\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3-2x^3}{h}$; e) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}$

Bài 5. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{-x^2+3x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+x-6}{x^3+8}$; c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-x^2-72}{x^2-2x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{1992}+x-2}{x^{1990}+x-2}$

Bài 6. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$

Bài 7.Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{49-x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{x+2}}{x^2-3x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$

Bài 8. Tính các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}-3}{x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$ c. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+4}-3}{x}$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$ e. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{x^2-1}$ f. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$

Dạng 7. Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Phương Pháp:

1. **1.** Nhận biết dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)} \text{ khi } \lim_{x\to x_0}u(x)=\pm\infty,\ \lim_{x\to x_0}v(x)=\pm\infty$$
$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{u(x)}{v(x)} \text{ khi } \lim_{x\to x_0}u(x)=\pm\infty,\ \lim_{x\to x_0}v(x)=\pm\infty$$

2. **2.** Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ cao nhất của biến ở mẫu (Hoặc phân tích thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước)
3. **3.** Nếu u(x) hoặc v(x) có chứa biến x trong dấu căn thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (Với k là mũ cao nhất của biến x trong dấu căn), sau đó chia tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x (thường là bậc cao nhất ở mẫu).

I. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^3+5x}{6x^3+x^2}$

Giải:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3+5x}{6x^3+x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3+\frac{5}{x^2}}{6+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn sau $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}+2x\right)$

Giải:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+x}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2}=-\frac{1}{4}$$

II. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Tìm các giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\left(3x^2+1\right)\left(5x+3\right)}{\left(2x^3-1\right)\left(x+1\right)}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-7x^2+x+5}{3|x|-13}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to-1}\left[\dfrac{\frac{1}{x+1}+3}{\frac{2x-3}{x^2+3x+2}}\right]$

Đáp số

a) -2 b) 0 c) $+\infty$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\left[\begin{array}{l}\text{khi } x\to+\infty:\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x-1}=4\\ \text{khi } x\to-\infty:\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x-1}=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$; f) $-\dfrac{1}{5}$

Bài 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-2x+3x^3}{x^3-9}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(1-2x\right)^5}{x^7+x+3}$; c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{9x+x+1}-\sqrt{4x^2+2x+1}}{x+1}$; e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^4-7x^2+x+5}{3|x|-13}$; f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt[3]{x^3-x+1}}$

Đáp số:

a) 3; b) -32; c) 5 khi $x\to+\infty$; -1 khi $x\to-\infty$; d) 1 khi $x\to+\infty$; -1 khi $x\to-\infty$

e) $\dfrac{1}{3}$ khi $x\to+\infty$; $-\dfrac{1}{3}$ khi $x\to-\infty$; f) 1 khi $x\to+\infty$; -1 khi $x\to-\infty$

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x(2x^2-1)}{(5x-1)(x^2+2x)}$; c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x-1)^2(7x+2)^2}{(2x+1)^4}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{3x-1}$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2x}}{3x-1}$; f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x}$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$; b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x+3}}{x^2+1}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x}{2x-2}$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x^2}{3x^2-2x}$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x\sqrt{x}+x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x+2)(x-1)}$

Dạng 8. Dạng vô định $\infty-\infty; 0.\infty$

Phương pháp:

1. Nếu biểu thức chứa biến số dưới dấu căn thì nhân và chia với biểu thức liên hợp
2. Nếu biều thức chứa nhiều phân thức thì quy đồng mẫu và đưa về cùng một biểu thức.
3. Thông thường, các phép biến đổi này có thể cho ta khử ngay dạng vô định $\infty-\infty; 0.\infty$ hoặc chuyển về dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}$

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn của hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(2x-3-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$

Đáp số:

a) -1 b) $\frac{1}{4}$ c) khi $x\to+\infty$: ĐS: 4 ; khi $x\to-\infty$: ĐS: $-\infty$ d) 0

e) khi $x\to+\infty$: ĐS: $\frac{5}{2}$; khi $x\to-\infty$: ĐS: $-\frac{5}{2}$ f) 0

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn của hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt{x^2-x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

Đáp số

a) $-\frac{1}{2}$ khi $x\to+\infty$; $\frac{1}{2}$ khi $x\to-\infty$; b) 2 khi $x\to+\infty$; -2 khi $x\to-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x+x-\sqrt{x^2-x}\right)$

$$=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}+\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}=\frac{1}{2}$

II. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}(2x^3-3x)$; b) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\sqrt{x^2-3x+4}$; c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

Bài 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}(\sqrt{x^2-2x+4}-x)$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})$; c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2})$

Bài 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}x(\sqrt{x^2+5}+x)$; b) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}(3x+2-\sqrt{9x^2+12x-3})$; c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}+x-2)$

Bài 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}-x+3)$; b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x^3-x^2+x}+x)$; c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x-1}-\sqrt{x^2-3x})$

MỘT SỐ DẠNG TOÁN NÂNG CAO {Tham khảo}

Dạng 1. Tìm giới hạn của các hàm số lượng giác (dạng vô định $\frac{0}{0}$)

Phương pháp: Vận dụng các công thức lượng giác để biến đổi hàm số lượng giác thành dạng có thể sử dụng định lí:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ hoặc $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=0\Rightarrow \lim\limits_{u(x)\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1;\ \lim\limits_{u(x)\to 0}\frac{u(x)}{\sin u(x)}=1$

Ví dụ 1. Tính các giới hạn của hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\sin x}$

Hướng dẫn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}=$

$$=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x-\sin 2x}{2\sin^2 x+\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x(\sin x-\cos x)}{2\sin x(\sin x+\cos x)}=1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin x\cos^2 x}{x}=4$

Ví dụ 2. Tính các giới hạn của hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 11x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 12x-\cos 10x}{\cos 8x-\cos 6x}$

Hướng dẫn và Đáp số

a) Xét hàm số $f(x)=\frac{\sin 3x}{1-\cos x}$, đặt $x=\frac{\pi}{3}-t$

Lúc đó: $f(x)=f\left(\frac{\pi}{3}-t\right)=\frac{\sin(\pi-3t)}{1-2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos t+\sin\frac{\pi}{3}\sin t\right)}=\frac{\sin 3t}{1-\cos t-\sqrt{3}\sin t}$

$$=\frac{\sin 3t}{1-\sin^2\frac{t}{2}-2\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\frac{\sin 3t}{2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right)}$$

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{1-\cos x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{6t}{2}.\frac{\sin 3t}{3t}}{2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right)}=-\sqrt{3}$$

$$b)\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos5x\cos7x}{\sin^2 11x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos5x+\cos5x-\cos5x\cos7x}{\sin^2 11x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}+\cos5x\left(1-\cos7x\right)}{\sin^2 11x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}+2\cos5x\sin^2\frac{7x}{2}}{\sin^2 11x}=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{\frac{25}{4}\sin^2\frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}+\cos5x\frac{\frac{49}{4}\sin^2\frac{7x}{2}}{\left(\frac{7x}{2}\right)^2}}{11^2\frac{\sin^2 11x}{\left(11x\right)^2}}$$

$$=2.\frac{\frac{25}{4}+\frac{49}{4}}{11^2}=\frac{37}{121}$$

$$c)\ \lim_{x\to0}\frac{\cos12x-\cos10x}{\cos8x-\cos6x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin11x}{\sin7x}=\frac{11}{7}$$

II. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Tính các giới hạn sau

$a)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin2x}-\cot x\right)$; $\quad b)\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2x}{\tan\left(x-1\right)}$; $\quad c)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\tan2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$

$d)\ \lim_{x\to0}\left[\frac{98}{83}\left(\frac{1-\cos3x\cos5x\cos7x}{\sin^2 7x}\right)\right]$; $\quad e)\ \lim_{x\to0}\frac{\cos^4 x-\sin^4 x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$; $\quad f)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\sin x\right)}{x}$

$g)\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$ $\quad h)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

Đáp số: $a)0$ $\quad b)\ -\frac{7}{4}$ $\quad c)\frac{1}{2}$ $\quad d)1$ $\quad e)\ -4$ $\quad f)1$ $\quad g)1$ $\quad h)\ -\frac{1}{12}$

Bài 2. Tính các giới hạn sau

$a)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{3x}$ $\quad b)\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}$ $\quad c)\ \lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos7x}{x^2}$ $\quad d)\ \lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos3x}{\sin^2 x}$

$e)\ \lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$ $\quad f)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{3}{\sin3x}\right)x$ $\quad g)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin2x+\sin x}{3\sin x}$ $\quad h)\ \lim_{x\to0}\frac{1-\sin x-\cos2x}{\sin x}$

Dạng 2. Giới hạn kẹp

Phương pháp: $h(x)\le f(x)\le g(x),\forall x\in K\setminus\left\{x_0\right\},x_0\in K$

và $\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=L\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=L$

I. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tính giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sin2x+\sqrt{3}\cos2x}{3x^2+6}$

Giải

Ta nhận thấy: $-2 \le \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \le 2$

Vậy $\dfrac{x^2-2}{3x^2+6} \le \dfrac{x^2+\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x}{3x^2+6} \le \dfrac{x^2+2}{3x^2+6}$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2}{3x^2+6} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2}{3x^2+6} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{6}{x^2}} = \dfrac{1}{3}$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x}{3x^2+6} = \dfrac{1}{3}$

Bài 2. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

Giải

Ta nhận thấy : $-x^2 \le x^2 \sin\dfrac{1}{x} \le x^2$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = 0$

II. Bài tập rèn luyện

Bài tập1. Tìm giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sin^2 x-5\cos 2x}{x^2+3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\dfrac{1}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x}\cos\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

Hướng dẫn và Đáp số:

a) Ta có: $\sin^2 x - 5\cos 2x = 11\sin^2 x - 5$

$\dfrac{2x-5}{x^2+3} \le \dfrac{2x+\sin^2 x-5\cos 2x}{x^2+3} \le \dfrac{2x+6}{x^2+3}$

....Đs:0

b) Tương tự bài mẫu 2. ĐS:0

c)Ta có: $-1 \le \cos\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x} \le \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x}\cos\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right) \le \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

....ĐS:0

Bài tập 2. Tìm giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5\cos x}{x^3-1}$; b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x\sin x}{2x^2+1}$; c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin 2x+2\cos 2x}{x^2+x+1}$

Hướng dẫn và Đáp số

a)

$*TH1: \forall x > 1, \dfrac{x^2-5}{x^3-1} \le \dfrac{x^2+5\cos x}{x^3-1} \le \dfrac{x^2+5}{x^3-1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5\cos x}{x^3-1} = 0$

$*TH2: \forall x < 1, \dfrac{x^2-5}{x^3-1} \ge \dfrac{x^2+5\cos x}{x^3-1} \ge \dfrac{x^2+5}{x^3-1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5\cos x}{x^3-1} = 0$

b) $\dfrac{-x}{2x^2+1} \le \dfrac{x\sin x}{2x^2+1} \le \dfrac{x}{2x^2+1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x\sin x}{2x^2+1} = 0$

c)ĐS: 0

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hám số liên tục tại một điểm

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác đinh trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Hàm số không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại x_0

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

Định nghĩa:

- $y=f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó
- $y=f(x)$ liên tục trên đoạng [a;b] nếu nó liên tục trên khoảng (a;b) và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

➢ Nhận xét: Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một " đường liền" trên khoảng đó.

3. Các định lí:

Định lí 1:

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$

b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng

Định lí 2: Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm điểm x_0. Khi đó:

a) Các hàm số $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ và $f(x).g(x)$ cũng liên tục tại điểm x_0

b) Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm x_0, nếu $g(x_0)\neq 0$

Định lí 3: Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho f(c)=0

Mệnh đề tương đương: Cho hàm số y=f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và f(a).f(b)<0. Khi đó phương trình f(x)=0 có ít nhất một nghiệm trong khoảng (a;b)

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số f(x) tại điểm x_0

Phương pháp

Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x\neq x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x=x_0 \end{cases}$

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0, chúng ta thực hiện theo các bước sau:

➢ **Bước 1:** Tính

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} f_1(x)=L$$

➢ **Bước 2:** Tính $f(x_0)=f_2(x_0)$

➢ **Bước 3:** Đánh giá hoặc giải phương rình $L=f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận

I. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ x + a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$

Ta có:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

$$f(1) = a + 1$$

Vậy:

*Nếu:

$2 = a + 1 \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow f(1) = 2 = \lim_{x \to 1} f(x)$, thì hàm số liên tục

*Nếu:

$2 \neq a + 1 \Leftrightarrow a \neq 1 \Leftrightarrow f(1) \neq 1 = \lim_{x \to 1} f(x)$, thì hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x = -1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ 3 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

Giải

Hàm đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x + 4)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (x + 4) = 3$$

$f(-1) = 3.$

Vậy hàm số liên tục tại $x = -1$.

Ví dụ 3. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m+1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại x=2

Giải

Hàm đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$\lim_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$ và $f(2) = m + 1$.

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2.$

Ví dụ 4. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 1 + \sqrt[3]{x - 1}}{x}, & \text{khi } x \neq 0 \\ 2x + 1, & \text{khi } x \neq 0 \end{cases}$$

Giải

II. Bài tập rèn luyện

BT 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 4 & \text{khi } x=1\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Hàm đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+2)=3.$$

$f(1)=4$.

Vì $\lim_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$ nên hàm số gián đoạn tại $x_0=1$

BT 2. Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ m^2x & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại x=1.

Hướng dẫn giải

Hàm đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2} \text{ và } f(1)=m^2.$$

Để hàm số liên tục tại $x=1$ thì $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

BT 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & \text{nếu } x\neq\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & \text{nếu } x=\sqrt{2}\end{cases}$; b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{(x-2)^2} & \text{nếu } x\neq 2\\ 2 & \text{nếu } x=2\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Hàm đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Khi $x\neq\sqrt{2}$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty;\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2};+\infty)$.

Ta xét tính liên tục của hàm số taih điểm $x=\sqrt{2}$.

Ta có

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})=2\sqrt{2} \text{ và } f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}.$$

Vì $\lim_{x\to\sqrt{2}}f(x)=f(\sqrt{2})$ nên hàm số liên tục tại $x=\sqrt{2}$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Khi $x\neq 2$ thì $g(x)=\dfrac{1-x}{(x-2)^2}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Ta xét tính liên tục của hàm số taih điểm $x=2$.

Ta có

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-x}{(x-2)^2}=-\infty \text{ và } g(2)=2.$$

Vì $\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)$ nên hàm số không liên tục tại $x=2$.

Vậy hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 4. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm x=0 và x=3

$$f(x)=\begin{cases} a & \text{Khi } x=0 \\ \dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)} & \text{khi } x^2-3x\neq 0 \\ b & \text{khi } x=3 \end{cases}$$

Bài 6. Xét tính liên tục của hàm số sau:

$$a) f(x)=\begin{cases} 1+x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{nếu } x\neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x=0 \end{cases} \qquad b) f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x\neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x=0 \end{cases}$$

Dạng 2. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp

Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x<x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x\geq x_0 \end{cases}$

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0, chúng ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tính $f(x_0)=f_2(x_0)$
- **Bước 2:** (Liên tục trái) tính:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f_1(x)=L_1$$

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1=f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận liên tục trái.

- **Bước 3:** (Liên tục phải) tính:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f_2(x)=L_2$$

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1=f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận liên tục phải.

- **Bước 4:** Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1=L_2$, từ đó đưa ra kết luận

I. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0=0$:

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{khi } x<0 \\ x^2+1 & \text{khi } x\geq 0 \end{cases}$$

Giải

Hàm số xác định tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2+1\right) = 1 \text{ và } \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x+a\right) = a.$$

$$f(0) = 1$$

Vậy :

$-$Nếu $a = 1$ thì $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1 \Leftrightarrow$ Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$

$-$Nếu $a \neq 1$ thì $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \Leftrightarrow$ Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$

Ví dụ 2. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

a) Tìm a để f(x) liên tục tại trái điểm x=1

b) Tìm a để f(x) liên tục tại phải điểm x=1

c) Tìm a để f(x) liên tục trên R.

Giải

Ta có:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x > 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \\ 2-x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

a) Để f(x) liên tục trái tại điểm x=1

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)$ tồn tại và $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

Ta có: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(2-x\right) = 1$ và $f(1) = a$

Vậy điều kiện là a=1

b) Để f(x) liên tục phải tại điểm x=1

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)$ tồn tại và $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Ta có: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x-2\right) = -1$ và $f(1) = a$

Vậy điều kiện là a=-1

c) hàm số liên tục trên R trước hết phải có:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 = -1$ (mâu thuẫn)

Vậy không tồn tại a để hàm số liên tục trên R

II. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại $x_0 = 0$: $f(x) = \begin{cases} x+2a & \text{khi } x < 0 \\ x^2+x+1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$

Bài 2. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{x+5}$ tại $x = 4$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{nếu } x < 1 \\ -2x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x = 1$

Bài 3. Xét tính liên tục của hàm số sau tại x=1 và x=-1

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ |x-1| & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$$

Bài 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5x-\sin 3x}{x} & \text{nếu } x>0\\ x^2-2x+2 & \text{nếu } x\le 0\end{cases}$ tại điểm x=0

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2 & \text{nếu } x\le 2\\ 3 & \text{nếu } x>2\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại điểm x=2.

Bài 6. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-3} & \text{nếu } x>2\\ ax+\dfrac{1}{4} & \text{nếu } x\le 2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Bài 7. Xét tính liên tục của hàm số sau: $f(x)=\begin{cases}2x^2 & \text{nếu } |x|<2\\ 5 & \text{nếu } x=2\\ 3x-1 & \text{nếu } |x|>2\end{cases}$

Dạng 3. Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng K

Phương pháp

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục trên khoảng K, chúng ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Xét tính liên tục của hàm số trên các khoảng đơn
- **Bước 2:** Xét tính liên tục của hàm số tại các điểm giao
- **Bước 3:** Kết luận.

I. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Chứng minh các hàm số sau liên tục trên R:

$$f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{khi } x\ne 0\\ 0 & \text{Khi } x=0\end{cases}$$

Giải

Hàm số f(x) liên tục với mọi $x\ne 0$.
Xét tính liên của f(x) tại x=0
Ta có:

$$\left|x.\cos\frac{1}{x^2}\right|=|x|\left|\cos\frac{1}{x^2}\right|\le|x|$$

$$\Rightarrow -|x|\le x.\cos\frac{1}{x^2}\le|x|\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(x.\cos\frac{1}{x^2}\right)=0$$

Mặt khác f(0)=0
Do đó, $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=0$.
Vậy hàm số liên tục trên toàn bộ trục số.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số trên toàn trục số:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{nếu } x<1\\ ax+1 & \text{nếu } x\ge 1\end{cases}$$

Hướng dẫn

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$

1. Khi x <1. Hàm số liên tục
2. Khi x>1. Hàm số liên tục
3. Khi x =1
    - a=1: Hàm liên tục tại x=1

- $a \neq 1$: Hàm số gián đoạn tại x=1

Kết luận:

- a=1: Hàm số liên tục trên toàn bộ trục số
- $a \neq 1$, hàm số liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ và gián đoạn tại x=1

II. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{\sqrt{2-x}-1} & \text{nếu } x < 1 \\ 2x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$. Xét sự liên tục của hàm số.

Hướng dẫn và đáp số

- Với x<1: hàm số liên tục
- Với x>1 Hàm số liên tục
- Xét x=1: Hàm số liên tục. Vậy hàm số liên tục trên R

Bài 2. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác đinh của chúng:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}, & \text{nếu } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{nếu } x = \sqrt{2} \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{(x-2)^2}, & \text{nếu } x \neq 2 \\ 3 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$

Đáp số

a) y=f(x) liên tục trên R

b) y=g(x) liên tục trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ nhưng gián đoạn tại x=2

Bài 3. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m^2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $(0;+\infty)$.

Đáp số: $m = \pm\dfrac{1}{2}$

Bài 4.

a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 4 & \text{nếu } x \geq 2 \\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{nếu } -7 < x < 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng hàm số liên tục trên khoảng $(-7;+\infty)$.

b) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 3 \\ ax+b & \text{nếu } 3 \leq x \leq 5 \\ 3 & \text{nếu } x > 5 \end{cases}$. Tìm a và b để hàm số liên tục, vẽ đồ thị của hàm số.

Hướng dẫn

a) x>2: hàm số liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$

-7<x<2 thì $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$ liên tục trên (-7;2). Vì sao?

x=2: Hàm số liên tục.

Kết luận: Hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(-7;+\infty)$

b) a=1 bà b=-2 thì hàm số liên tục.

Dạng 4. Tìm điểm gián đoạn của hàm số f(x)

Phương pháp: x_0 là điểm gián đoạn của hàm số f(x) nếu tại điểm x_0 hàm số không liên tục. Thông thường x_0 thoã mãn một trong các trường hợp:

1. f(x) không tồn tại
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ không tồn tại, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Ví dụ 1. Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)} & \text{nếu } x(x-3)\neq 0\\ a & \text{nếu } x=0\\ b & \text{nếu } x=3\end{cases}$

Với a, b là hai tham số. Tìm các điểm gián đoạn của hàm số

Giải

D=R nên ta chỉ xét sự gián đoạn của hàm số tại các điểm x=0 và x=3

- Tại x=0, ta có f(0)=a và $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)}=+\infty$

  Vậy x=0 là điểm gián đoạn của hàm số

- Tại x=3 và f(3)=b và $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{5}{3}$

  Vậy khi $b\neq\dfrac{5}{3}$ và với mọi a thì điểm gián đoạn của hàm số là x=0;x=3

Khi $b=\dfrac{5}{3}$ và với mọi a thì điểm gián đoạn của hàm số là x=0

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của a và b để hàm số $f(x)=\begin{cases}ax-b & \text{nếu } x\leq 1\\ 3x & \text{nếu } 1<x<2\\ bx^2-a & \text{nếu } x\geq 2\end{cases}$ liên tục tại điểm x=1 và gián đoạn tại x=2

Hướng dẫn và đáp số

Hàm số liên tục tại x=1 và gián đoạn tại c=2 thì

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=3\\ 4b-a\neq 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+3\\ b\neq 3\end{cases}$$

Ví dụ 3. Tìm các điểm gián đoạn của hàm số:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{nếu } x\neq 0\\ -2 & \text{nếu } x=0\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8} & \text{nếu } x\neq 8\\ 0 & \text{nếu } x=8\end{cases}$

Dạng 5. Chứng minh phương trình f(x)=0 có nghiệm

Phương pháp

1. Chứng minh phương trình f(x)=0 có ít nhất một nghiệm
   - Tìm hai số a và b sao cho f(a).f(b)<0
   - Hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a;b]

- Phương trình f(x)=0 có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a;b)$

2. Chứng minh phương trình f(x)=0 có ít nhất k nghiệm
   - Tìm k cặp số a_i, b_i sao cho các khoảng $\left(a_i;b_i\right)$ rời nhau và

$$f(a_i)f(b_i) < 0,\ i = 1,...,k$$

   - Phương trình f(x)=0 có ít nhất một nghiệm $x_i \in \left(a_i;b_i\right)$
3. Khi phương trình f(x)=0 có chứa tham số thì cần chọn a, b sao cho :
   - f(a), f(b) không còn chứa tham số hoặc chưa tham số nhưng dấu không đổi.
   - Hoặc f(a), f(b) còn chứa tham số nhưng tích f(a).f(b) luôn âm

I. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Chứng minh rằng phương trình $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm

Hướng dẫn

Xét hàm số

$f(x) = 2x^3 - 10x - 7$, ta có f(-1)=1; f(0)=-7; f(3)=17
nên $f(-1).f(0) = -7 < 0$ và $f(0).f(3) = -119 < 0$.
Mặt khác: f(x)=$2x^3 - 10x - 7$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\left[-1;0\right]$ và $\left[0;3\right]$
Suy ra, phương trình $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in \left(-1;0\right)$ và $x_1 \in \left(0;3\right)$
Vậy phương trình $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng phương trình $\left(1 - m^2\right)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

Hướng dẫn

Xét hàm số

$f(x) = \left(1 - m^2\right)x^5 - 3x - 1$, ta có f(0)=-1 và f(-1)=m^2+1
nên $f(-1).f(0) = -\left(m^2 + 1\right) < 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$
Mặt khác: f(x)=$\left(1 - m^2\right)x^5 - 3x - 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\left[-1;0\right]$
Suy ra, phương trình $\left(1 - m^2\right)x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in \left(-1;0\right)$
vậy phương trình $\left(1 - m^2\right)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = a$ luôn có nghiệm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ với mọi a

Hướng dẫn

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} - a$ liên tục trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} - a\right) = -\infty$ nên tồn tại x_1 gần $\frac{\pi}{2}$ để $f(x_1) < 0$

$\lim\limits_{x \to \pi^-}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} - a\right) = +\infty$ nên tồn tại x_1 gần π để $f(x_2) > 0$

Suy ra $f(x_1).\ f(x_2) < 0$ nên phương trình f(x)=0 luôn có nghiệm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất x_0 thoả mãn $0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn:

Xét hàm số $f(x)=x^3+x-1$, ta có f(0)=-1 và f(1)=1 nên f(0).f(1)<0

Mặt khác: $f(x)=x^3+x-1$ là hàm đa thức nên liên tục trên [0;1]

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\left(x_1^3+x_1-1\right)-\left(x_2^3+x_2-1\right)}{x_1-x_2}=\frac{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1\right)}{x_1-x_2}$$

$$=x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}+1>0 \text{ với mọi } x_1;x_2 \text{ thuộc R}$$

Suy ra $f(x)=x^3+x-1$ đồng biến trên R nên phương trình $x^3+x-1=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\in(0;1)$

Theo bất đẳng thức Co si:

$$1=x_0^3+x_0>2\sqrt{x_0^4}\Rightarrow 1>2x_0^2\Rightarrow x_0^2<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<x_0<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

II. Bài tập rèn luyện

Bài 1.

a) Cho ba số thực a,b,c thoã mãn a<b<c

Chứng minh phương trình (x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0 luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Cho phương trình $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ thõa mãn $2a+6b+19c=0$. Chứng minh phương trình có nghiệm trong $\left[0;\frac{1}{3}\right]$

c) Cho phương trình $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ thõa mãn $\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$ (Với $m>0$)

Chứng minh phương trình có nghiệm (0;1).

Hướng dẫn và đáp số

a) Xét hàm số f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a) là tam thức bậc hai có hệ số A=3 nên phương trình f(x)=0 có nhiều nhất hai nghiệm

Ta có: f(a)>0;f(b)<0);f(c)>0

Vậy f(a).f(b)<0 và f(b).f(c)<0

Mặt khác f(x) là hàm đa thức nên nó liên tục trên [a;b] và [b;c]

Suy ra, phương trình f(x)=0 có nghiệm $x_1\in(a;b)$ và $x_2\in(b;c)$.

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm.

b) Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ liên tục trên R

Tính $f(0)=c;f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}(a+3b+9c)$

$f(0)+18f\left(\frac{1}{3}\right)=0$

Suy ra $f(0),f\left(\frac{1}{3}\right)$ trái dấu hoặc $f(0)=f\left(\frac{1}{3}\right)=0$

Vậy phương trình $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ có nghiệm trong $\left[0;\frac{1}{3}\right]$

c) Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ liên tục trên R

+ Khi c=0, ta có $ax^2+bx=0$

- Néu a=0 thì từ giả thiết $\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$ suy ra b=0, phương trình có vô số nghiệm nên phương trình có nghiệm trong khoảng (0;1)

- Nếu $a \neq 0$, ta có $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x(ax+b) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{m+1}{m+2} \in (0;1) \end{array}\right.$$

- Khi $c \neq 0$, ta có f(0)=c và $f\left(\dfrac{m+1}{m+2}\right) = \dfrac{-c}{m(m+2)}$

Suy ra phương trình f(x)=0 có nghiệm trong khoảng $\left(0;\dfrac{m+1}{m+2}\right) \subset (0;1)$

Bài 2.

a) Chứng minh phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có 3 nghiệm trên khoảng (-2;2)

b) Chứng minh phương trình $2x^5 - x - 2 = 0$ có 3 có nghiệm duy nhất $x_0 > \sqrt[3]{2}$

c) Chứng minh phương trình $x^4 - x - 3 = 0$ có 3 có nghiệm $x_0 \in (1;2)$ và $x_0 > \sqrt[7]{12}$

Hướng dẫn và đáp số:

a) Tính f(-2);f(0);f(1);f(2)

b) Xét hàm $f(x) = x^5 - x - 2$ liên tục trên R và $f(1) = -2$; $f(2) = 28 \Rightarrow f(1).f(2) < 0$

ta chứng minh đc hàm f(x) đồng biến trên (1;2) nên phương trình $x^5 - x - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (1;2)$.

Ta có: $x_0^5 = x_0 + 2 > 2\sqrt{2x_0} \Leftrightarrow x_0^{10} > 8x_0 \Leftrightarrow x_0^9 > 8 \Leftrightarrow x_0 > \sqrt[3]{2}$

c) Tương tự câu b)

Bài 3.

a) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thỏa mãn 2a+3b+6c=0. Chứng minh phương trình có nghiệm trong khoảng (0;1)

b) Cho phương trình $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$ thỏa mãn 2a+3b+6c=0. Chứng minh phương trình có ít nhất nhất một nghiệm trong khoảng $\left(k\pi;\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right), k \in Z$

Hướng dẫn và đáp số:

b) $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$ (1) và 2a+3b+6c=0

Đặt $t = \tan x$ với $x \in \left(k\pi;\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) \Rightarrow t \in (0;1)$, ta có : $at^2 + bt + c = 0$ (2)

- Trường hợp 1: Nếu c=0 thì $at^2+bt=0$

+ khi a=0 thì b=0....

+ Khi $a \neq 0$ thì $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{3}$, từ phương trình $at^2 + bt = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

....

- Trường hợp 2: Nếu $c \neq 0$, ta có f(0)=c và $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{9}(-12c + 9c) = -\dfrac{c}{3}$ ....

Phương trình (2) có nghiệm $\left(0;\frac{2}{3}\right)\subset(0;1)$ nên phương trình (1) có nghiệm trong khoảng $\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}$

Bài 4. Chứng minh phương trình : $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$ có ba nghiệm phân biệt thuộc $(-7;9)$.

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi m phương trình $x^3+mx^2-1=0$ luôn có một nghiệm dương.

Bài 6. Cho phương trình: $|x|^3-mx^2+(m+1)|x|-2=0$

a) Giải phương trình với m=1

b) Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có ít nhất hai nghiệm phân biệt

Hướng dẫn và đáp số:

Đặt t=|x|, $t\ge 0$, ta được: $t^3-mt^2+(m+1)t-2=0$

a) $x=\pm 1$

b) Xét hàm

$f(t)=t^3-mt^2+(m+1)t-2$ liên tục trên R

Ta có: f(0)=-2<0,

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty \Rightarrow \exists c>0$ sao cho f(c)>0

Suy ra:

$f(0).f(c)<0$,(2) có một nghiệm $t_1\in(0,c)\Rightarrow x=\pm t_1$

Vậy, với mọi m phương trình luôn có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Bài 7. Chứng minh rằng với mọi m phương trình: $\left(\sqrt{x-1}\right)^3+mx=m+1$. luôn có một nghiệm lớn hơn 1.

Giải

Đặt $t=\sqrt{x-1}$, điều kiện $t\ge 0$

Khi đó phương trình có dạng:

$f(t)=t^3+mt^2-t=0$

Xét hàm số y=f(t) liên tục trên $[0;+\infty)$

Ta có:

$f(0)=-1<0$

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$, vậy tồn tại c>0 để f(c)>0

Suy ra:

f(0).f(c)<0

Vậy phương trình f(t)=0 luôn có nghiệm $t_0\in(0;c)$, khi đó:

$\sqrt{x-1}=t_0 \Leftrightarrow t_0^2+1>1$

Vậy với mọi m phương trình luôn có một nghiệm lớn hơn 1.

Bài 8. Cho a,b,c là ba số dương phân biệt. Chứng minh rằng phương trình:

$a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-b)(x-a)=0$

luôn có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a<b<c$ và đặt:

$f(x)=a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-b)(x-a)$

Ta có: f(b)<0 và hệ số x^2 của f(x) bằng a+b+c>0

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1<b<x_2$

Bài 9. Chứng minh rằng phương trình : $p(x-a)(x-c)+q(x-b)(x-d)=0$ luôn có nghiệm, biết rằng $a \le b \le c \le d$, p và q là hai số thực bất kì.

Bài 10. Chứng minh phương trình

a) $(-m^2+1)x^3-4x-1=0$ luôn luôn có nghiệm.

b) $\cos 2x = 2\sin x - 2$ có ít nhất 2 nghiệm tong khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\pi\right)$

c) $\sqrt{x^3+6x+1}-2=0$ có nghiệm dương

d) $x^5-x^2-2x-1=0$ có nghiệm.

Hướng dẫn và đáp số:

a) Xét f(0) và f(1)

b) Xét hàm số y=f(x)=cos2x-sin2x+2

Xét trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right);\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

c) Xét f(0) và f(1)

MỘT SỐ BÀI TẬP LÝ THUYẾT {Tham khảo}

Bài 1. Cho ví dụ về một hàm số liên tục trên (a;b] và trên (b;c) nhưng không liên tục trên (a;c).

Hướng dẫn

Xét hàm số $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{nếu } x\le 0 \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{nếu } x>0 \end{cases}$

* Trường hợp $x\le 0$:
f(x) là hàm đa thức, liên tục trên $\mathbb{R}$, nên nó liên tục trên $(-2;0]$
*Trường hợp $x>0$:
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ là hàm số phân thức hữu tỉ nên liên tục trên (0;2) thuộc tập xác định của nó. Như vậy f(x) liên tục trên (-2;0] và trên (0;2).
Tuy nhiên, vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ nên hàm số f(x) không có giới hạn hữu hạn tại x=0. Do đó, nó không liên tục tại x=0. Nghĩa là không liên tục trên (-2;2).

Bài 2. Chứng minh rằng nếu một hàm số liên tục trên (a;b] và trên [b;c) thì nó liên tục trên (a;c).

Hướng dẫn

Vì hàm số liên tục trên $(a;b]$ nên liên tục trên $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ (1)
Vì hàm số liên tục trên $[b;c)$ nên liên tục trên $(b;c)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra f(x) liên tục trên các khoảng $(a;b)$ và $(b;c)$ và liên tục tại x=b (vì $\lim\limits_{x\to b} f(x)=f(b)$). Nghĩa là nó liên tục trên (a;c)

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(x-1)|x|}{x}$. Vẽ đồ thị hàm số này. Từ đồ thị dự đoán các khoảng trên đó hàm số liên tục và chứng minh dự đoán đó.

Hướng dẫn

a) $f(x)=\dfrac{(x-1)|x|}{x}=\begin{cases} x-1, \text{nếu } x>0 \\ 1-x, \text{nếu } x<0 \end{cases}$
Hàm số này xó tập xác định là $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
b) Từ đồ thị dự đoán f(x) liên tục trên các khoảng $(-\infty;0),(0;+\infty)$, nhưng không liên tục trên $\mathbb{R}$. Thật vậy:
* Với x>0, f(x)=x-1 là hàm phân thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó liên tục trên $(0;+\infty)$.
* Với x>0, f(x)=1-x là hàm phân thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó liên tục trên $(-\infty;0)$
Dễ thấy hàm số gián đoạn tại x=0, vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1;\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$

Bài 4. Cho hàm số y=f(x) liên tục trên đoạn [a;b]. Nếu f(a).f(b)>0 thì phương trình f(x)=0 có nghiệm hay không trong khoảng (a;b)? Cho ví dụ minh hoạ.

Hướng dẫn

Nếu hàm số y=f(x) liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình f(x)=0 có thể có nghiệm hoặc vô nghiệm trong khoảng (a;b).
Ví dụ minh họa:
* $f(x)=x^2-1$ liên tục trên [-2;2], f(-2).f(2)=9>0. Phương trình $x^2-1=0$ có nghiệm $x=\pm 1$ trong khoảng (-2;2).
* $f(x)=x^2+1$ liên tục trên [-1;1], f(-1).f(1)=4>0. Phương trình $x^2+1=0$ có nghiệm $x=\pm 1$ trong khoảng (-1;1).

Bài 5. Nếu hàm số y=f(x) không liên tục trên đoạn [a;b] nhưng f(a).f(b)<0, thì phương trình f(x)=0 có nghiệm hay không trong khoảng (a;b)? Hãy giải thích câu trả lời bằng minh hoạ hình học.

Hướng dẫn

Nếu hàm số y=f(x) không liên tục trên đoạn [a;b] nhưng f(a).f(b)<0 thì phương trình f(x)=0 có thể có nghiệm hoặc vô nghiệm trong khoảng (a;b)

Minh hoạ hình học: Bổ sung hình vẽ /185.SBT

Bài 5. Chứng minh phương trình:

$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ luôn có nghiệm với n là số tự nhiên lẻ.

Hướng dẫn

Hàm số $f(x)=x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ xác định trên $\mathbb{R}$.
*Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên với dãy số (x_n) bất kì mà $x_n \to +\infty$, ta luôn có $\lim f(x_n) = +\infty$. Do đó $f(x_n)$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Nói cách khác, luôn tồn tại số a sao cho f(a)>1. (1)
*Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (do n lẻ). Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ nên với dãy số (x_n) bất kì mà $x_n \to -\infty$, ta luôn có $\lim f(x_n) = -\infty$ hay $\lim\left[-f(x_n)\right] = +\infty$.
Do đó $-f(x_n)$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
Nếu số dương này là 1 thì $-f(x_n) > 1$ kể từ số hạng nào đó trở đi. Nói cách khác, luôn tồn tại số b sao cho -f(b)>1 hay f(b)<-1. (2)
Từ (1) và (2) suy ra f(a).f(b)<0.
Mặt khác hàm đa thức f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$, nên liên tục trên $\left[a;b\right]$
Do đó, phương trình f(x)=0 luôn có nghiệm

Bài 6. Cho hàm số f(x) liên tục và đồng biến trên đoạn [a;b]. Chứng minh rằng với mọi dãy hữu hạn có các số $c_1,c_2,c_3,...,c_n$ cùng thuộc [a;b] thì phương trình: $f(x) = \frac{1}{n}\left[f(c_1) + f(c_2) + ... + f\left(c_n\right)\right]$ luôn có nghiệm trong đoạn [a;b]

Hướng dẫn

Ta có: $a \le c_1 \le b; a \le c_2 \le b; a \le c_3 \le b; ...$
Hàm số f(x) đồng biến trên [a;b]

$$f(a) \le f(c_1) \le f(b)$$
$$f(a) \le f(c_2) \le f(b)$$

Nên : $f(a) \le f(c_3) \le f(b)$

....

$$f(a) \le f(c_n) \le f(b)$$

Suy ra :

$$nf(a) \le f(c_1) + f(c_2) + ... + f(c_n) \le nf(b)$$
$$\Rightarrow f(a) \le \frac{1}{n}\left[f(c_1) + f(c_2) + ... + f(c_n)\right] \le f(b)$$

Đặt $M = M = \frac{1}{n}\left[f(c_1) + f(c_2) + ... + f(c_n)\right]$

Xét hàm g(x)=f(x)-M liên tục trên [a;b]; $g(a)=f(a)-M \le 0$ và $g(b)=f(b)-M \ge 0$. Suy ra: $g(a).g(b) \le 0$.
*Khi $g(a).g(b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(a) = 0 \\ g(b) = 0 \end{array}\right.$ nên a hoặc b là nghiệm của phương trình f(x)=M
*Khi g(a).g(b)<0 thì phương trình f(x)-M=0 có ít nhất một nghiệm trong (a;b)
Vậy, phương trình : $f(x)=\frac{1}{n}\left[f(c_1) + f(c_2) + ... + f(c_n)\right]$ luôn có nghiệm trong $\left[a;b\right]$

Bài 7. Cho hàm số y=f(x) xác định trên khoảng (a;b) chứa điểm x_0. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$ thì hàm số f(x) liên tục tại x_0

Hướng dẫn: Đặt $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L$ và biểu diễn f(x) qua g(x)

ÔN TẬP CHƯƠNG 4

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n^2-3n+2}{2n^2+3n+2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n\sqrt{3n^3}+2}{4n^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

Đáp số: a) $\dfrac{1}{2}$ b) $+\infty$ c) $\dfrac{1}{3}$

Bài 2. Tính tổng các cấp số nhân lùi vô hạn:

a) $1+0,03+(0,03)^2+...+(0,03)^n+...$

b) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+...+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+...$

c) $1+0,9+(0,9)^2+...+(0,9)^{n-1}+...$

Hướng dẫn và Đáp số: a) $1+\dfrac{\frac{3}{100}}{1-\frac{3}{100}}=\dfrac{100}{97}$ b) $1+\dfrac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{3}$ c) 10

Bài 3. Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,131131...(chu kì 131) dưới dạng số hữu tỉ.

Đáp số: $S=2+\dfrac{\frac{131}{1000}}{1-\frac{131}{1000}}=2+\dfrac{131}{999}$

Bài 4. Cho dãy số (x_n): $x_n=\dfrac{2n-1}{3n+1}$

a) Chứng minh dãy số (x_n) dãy tăng

b) Dãy (x_n) hội tụ có giới hạn hữu hạn.

Hướng dẫn và đáp số:

a) Chứng minh $x_{n+1}-x_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$

b) $\lim x_n=\dfrac{2}{3}$

Bài 5. Dùng định nghĩa giới hạn chứng minh:

a) $\lim\limits_{x\to1}(2x-6)=-4$ b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3}{(1-x)^2}=+\infty$

Bài 6. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$; c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Đáp số: a) 1; b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{13}{12}$ d) 0

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}1 & \text{nếu } x\ge0\\ x^2+x+1 & \text{nếu } x<1\end{cases}$. Chứng minh hàm số liên tục.

Hướng dẫn:

- Với $x\neq0$: Hàm số liên tục.
- Với x=0. Hàm số liên tục

$\Rightarrow$ Vậy hàm số liên tục trên tập xác định

Bài 8. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x + a & \text{nếu } x < 0 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$. Tìm a,b để hàm số liên tục.

Đáp số: với a=1, b bất kì thì hàm số liên tục trên R

Bài 9. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2\sqrt{x}-3}{1-2\sqrt{x}}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x+5}$; d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$

Đáp số: a) $\dfrac{2}{9}$ b) $-\infty$ c) 1 d) $\dfrac{1}{12}$

Bài 10. Chứng minh phương trình sau có nghiệm:

a) $3x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm
b) Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng (0;2)
c) $4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$ có 3 nghiệm trong các khoảng (-1;0),(0;1),(2;4).

Hướng dẫn:

f(x)=0 có nghiệm trong đoạn [a;b] $\Leftrightarrow f(a).f(b) < 0$

a) khoảng (0;1)
b) (0;2)
c) (-1;0),(0;1),(2;4).